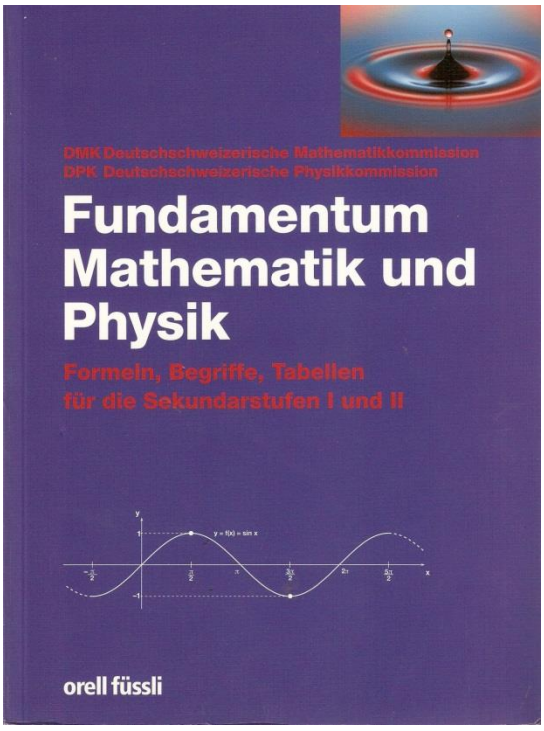
INSEDE Tools

Institute for Sustainable Economic Development

Mathematische Grundlagen zum Verständnis von Vektoren

Business Engineering V2.011



Auszug aus: Fundamentum Mathematik und Physik, das in den Kantonsschulen verwendet wird.
4. Auflage 2007, © 2001 Orell Füssli Verlag AG, Zürich
ISBN 978-3-280-02744-8

Inhalt

Mathematische Symbole 3
Vektoren 4
Rechnen mit Vektoren (Prinzip) 5
Vektorgeometrie im Raum 6
Rechenoperationen 7
Die Gerade 8
Die Ebene 9
Die Kugel 10
Die Vektortypen im Business Engineering 11
Rechte 12

Eine Arbeitsunterlage finden Sie unter: XXXXXX

© 2011 Peter Bretscher, Eggersriet

Hotline (mobile): +41 79 650 49 04

Erstellt: 25. Februar 2011
Revidiert: 25. Februar 2011
Gedruckt: 17. Oktober 2014

Permalink:

http://www.insede.org/permalink/Vektormathematik_V0.09_d.pdf

Mathematische Symbole

Mathematische Symbole

$=$	gleich	$\neq$	ungleich
$:=$	nach Definition gleich	$\equiv$	identisch
$\approx$	ungefähr gleich, rund	$\propto$	proportional
$< \leq$	kleiner bzw. kleiner gleich	$> \geq$	grösser bzw. grösser gleich
$\ll$	wesentlich kleiner		
$\parallel$	parallel	$\nparallel$	nicht parallel
$\cong$	kongruent	$\sim$	ähnlich
$\perp$	rechtwinklig/senkrecht/orthogonal/normal	$\overline{AB}$	Strecke von A nach B
$\wedge$	und	$\forall$	für alle
$\vee$	oder	$\exists$	es existiert
$\neg$	Negation	$\circlearrowleft$	zyklisch vertauschbar
$\Rightarrow$	daraus folgt (Implikation)	$\Leftrightarrow$	genau dann wenn (Äquivalenz)
$\in \notin$	Element von bzw. nicht Element von	$\subset$	Teilmenge
$\cup$	vereinigt mit	$\cap$	geschnitten mit
$\{\}, \emptyset$	leere Menge		

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (nach DIN 5473 mit $\mathbb{N}^*$ bezeichnet)
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit 0: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (nach DIN 5473 mit $\mathbb{N}$ bezeichnet)
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen (= Menge der Brüche)
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen (= Menge der Dezimalbrüche)
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Griechisches Alphabet

A	α	a	Alpha	H	η	e	Eta	N	ν	n	Nü
B	β	b	Beta	Θ	θ ϑ	th	Theta	Ξ	ξ	x	Xi
Γ	γ	g	Gamma	I	ι	i	Jota	O	o	o	Omikron
Δ	δ	d	Delta	K	κ	k	Kappa	Π	π	p	Pi
E	ε	e	Epsilon	Λ	λ	l	Lambda	P	ϱ ρ	r	Rho
Z	ζ	z	Zeta	M	μ	m	Mü	Σ	σ ς	s	Sigma

T	τ	t	Tau				
Y	υ	y	Ypsilon				
Φ	φ ϕ	ph	Phi				
X	χ	ch	Chi				
Ψ	ψ	psi	Psi				
Ω	ω	o	Omega				

Intervalle

offen

$]a, b[= (a, b) := \{x \mid a < x < b \wedge x \in \mathbb{R}\}$

abgeschlossen

$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b \wedge x \in \mathbb{R}\}$

halboffen: links offen, rechts abgeschlossen

$]a, b] = (a, b] := \{x \mid a < x \leq b \wedge x \in \mathbb{R}\}$

halboffen: rechts offen, links abgeschlossen

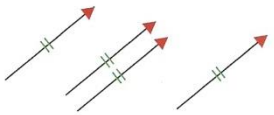
$[a, b[= [a, b) := \{x \mid a \leq x < b \wedge x \in \mathbb{R}\}$

8 Vektoren

8.1 Grundbegriffe

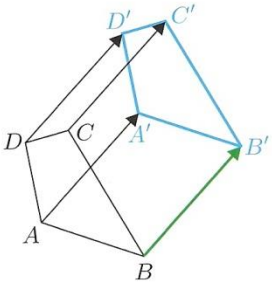
Definition

Eine unendliche Menge paralleler, gleich gerichteter und gleich langer Strecken (Pfeile) heisst Vektor.



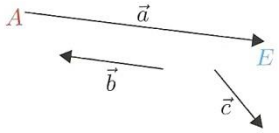
Ein Vektor kann durch einen Pfeil repräsentiert werden.

Eine Verschiebung (Translation) wird durch einen einzigen Pfeil (einen Repräsentanten) aus der unendlichen Menge (Äquivalenzklasse) aller parallelen, gleich gerichteten und gleich langen Pfeile festgelegt.



Schreibweise

Vektoren werden mit Kleinbuchstaben und einem Pfeil oder mittels Anfangs- und Endpunkt bezeichnet: $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$



Skalare und Vektoren

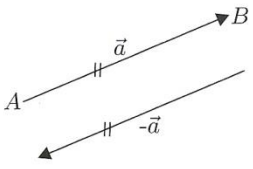
In unserer physikalischen Umwelt werden häufig skalare Grössen (z. B. Temperatur, Masse, Energie, Frequenz) und vektorielle Grössen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft, Drehmoment, elektrische Feldstärke) unterschieden. Für einen Skalar reicht die Angabe einer Zahl (bzw. einer Masszahl und einer Masseinheit). Ein Vektor ist erst durch seine Länge (seinen Betrag) und seine Richtung vollständig bestimmt.

$T, \quad m$
$\vec{v}, \quad \vec{F}$

Spezielle Vektoren

Der Nullvektor $\vec{0}$ ist ein Vektor mit der Länge 0 und unbestimmter Richtung.

Zu jedem Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ existiert der Gegenvektor $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ mit derselben Länge aber entgegengesetzter Richtung wie $\vec{a}$.
Es gilt: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$



Ein Einheitsvektor $\vec{e}$ hat die Länge 1.

33

Rechnen mit Vektoren (Prinzip)

8.2 Rechnen mit Vektoren (koordinatenfrei)

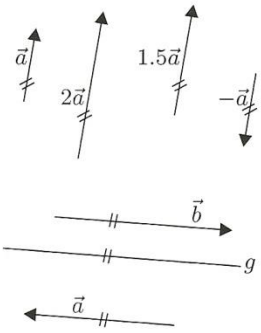
Multiplikation mit einem Skalar

Für $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stellt $r \cdot \vec{a}$ den Vektor mit der $|r|$-fachen Länge von $\vec{a}$ dar.
Falls $r > 0$ ist, hat $r \cdot \vec{a}$ dieselbe Richtung wie $\vec{a}$, falls $r < 0$ die entgegengesetzte Richtung.

Zudem gilt: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die zur gleichen Geraden parallel sind, heissen kollinear. Sie sind Vielfache voneinander,

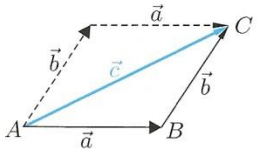
d. h. $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ oder $\vec{b} = \frac{1}{k} \cdot \vec{a}$.



Addition

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man die Verschiebungen hintereinander ausführt.

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

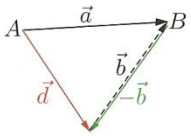


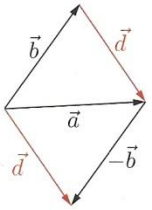
Subtraktion

Der Vektor $\vec{b}$ wird vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert, indem man zu $\vec{a}$ den Gegenvektor $-\vec{b}$ addiert.

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$

Gleichwertig ist: Der Differenzvektor $\vec{d}$ wird so konstruiert, dass $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$ ergibt.





Rechengesetze

Es gelten ähnliche Regeln wie für das Rechnen mit Zahlen.

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\
\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\
\vec{a} + \vec{0} &= \vec{a} \\
u(\vec{a} + \vec{b}) &= u\vec{a} + u\vec{b} \\
(u + v)\vec{a} &= u\vec{a} + v\vec{a} \\
u(v\vec{a}) &= (uv)\vec{a} = uv\vec{a}
\end{aligned}$$

Für andere Rechenoperationen (z. B. Skalar- und Vektorprodukt), bei denen die Rechengesetze nicht uneingeschränkt gelten: (vgl. 46, *11.2*)

$n_0 = \pm h \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ | $F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ | $V_{Spat} = |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$
$V_{Pyr} = \frac{1}{6} V_{Spat}$

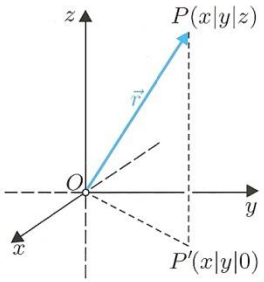
11 Vektorgeometrie im Raum

11.1 Vektoren im dreidimensionalen Koordinatensystem

Ortsvektor

Ortsvektoren führen vom Nullpunkt $O(0|0|0)$ zu einem beliebigen Punkt $P(x|y|z)$.

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Länge (Betrag) eines Ortsvektors

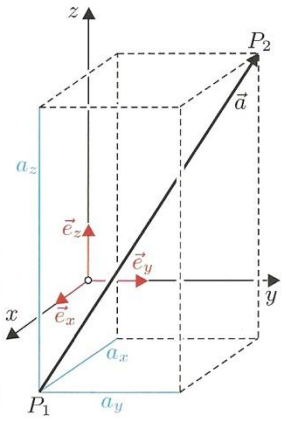
$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Freier Vektor

Freie Vektoren dürfen parallel zu sich selbst verschoben werden.

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z := \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$



Länge (Betrag) eines Vektors

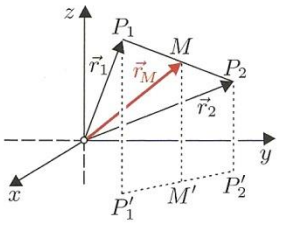
$$|\vec{a}| = a = \overrightarrow{P_1P_2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

(Raumdiagonale im Quader)

Vektor aus Anfangs- und Endpunkt

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

mit $P_1(x_1|y_1|z_1)$ und $P_2(x_2|y_2|z_2)$



Abstand zweier Punkte (Distanzformel)

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

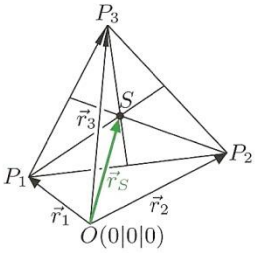
Mittelpunkt einer Strecke

$$\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2},\quad y_M = \frac{y_1+y_2}{2},\quad z_M = \frac{z_1+z_2}{2}$$

Schwerpunkt eines Dreiecks

$$\vec{r}_S = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3)$$

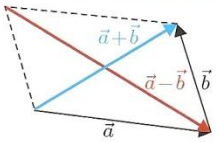


Rechenoperationen

11.2 Rechenoperationen mit Vektoren

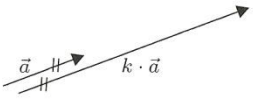
Addition und Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$



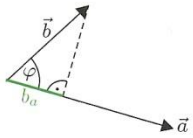
Multiplikation mit einem Skalar

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$



Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



φ ist der Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
b_a ist die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.

Spezialfall

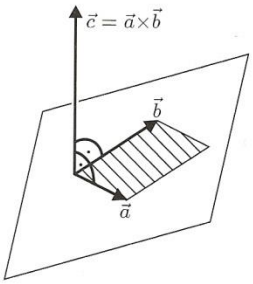
Für $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Vektorprodukt

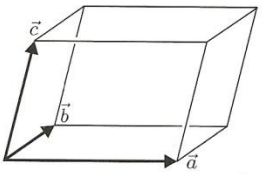
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



$\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$; $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem.
$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
Beachte: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$

Spatprodukt

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$



$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ ist gleich dem Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats.

46

Die Gerade

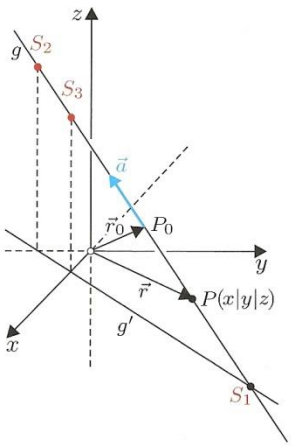
11.3 Gerade

Parameterform

$$g:\ \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}$$

$$g:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$P_0(x_0|y_0|z_0)$ ist ein fester Punkt der Geraden g, $\vec{a}$ heisst Richtungsvektor von g.
$t \in \mathbb{R}$ heisst Parameter.
g' ist der Grundriss von g.
Beachte: Eine Gerade im Raum kann nur mittels Parametergleichung beschrieben werden.

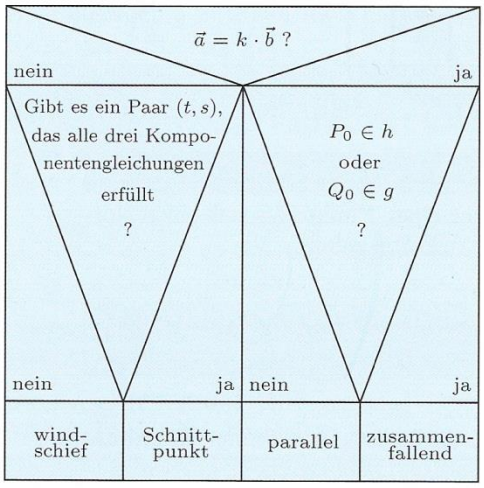


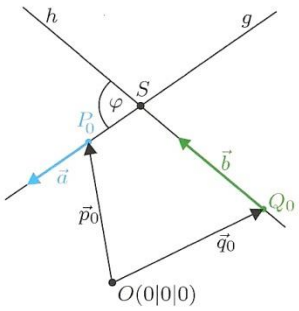
Spurpunkte

Die Durchstosspunkte einer Geraden mit den drei Koordinatenebenen heissen Spurpunkte.
S_1: Durchstosspunkt mit der xy-Ebene
S_2: Durchstosspunkt mit der yz-Ebene
S_3: Durchstosspunkt mit der xz-Ebene

Gegenseitige Lage zweier Geraden

$g:\ \vec{r} = \vec{p}_0 + t \cdot \vec{a}$, $h:\ \vec{r} = \vec{q}_0 + s \cdot \vec{b}$
Für die gegenseitige Lage zweier Geraden im Raum gibt es vier Möglichkeiten:





Winkel zwischen zwei Geraden

Für den Zwischenwinkel φ gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}$$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden.

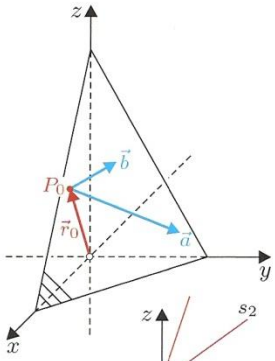
47

11.4 Ebene

Parameterform

$\varepsilon\colon \vec{r} = \vec{r}_0 + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b}$

P_0 ist ein fester Punkt der Ebene ε mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{r}_0$. $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind zwei nicht kollineare Richtungsvektoren (vgl. 46: Multiplikation mit einem Skalar) der Ebene.
$u, v \in \mathbb{R}$ heissen Parameter.



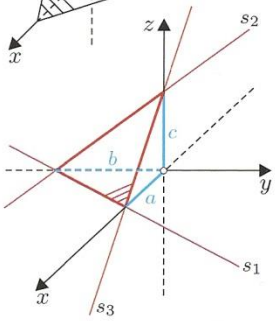
Koordinatenform

$\varepsilon\colon Ax + By + Cz + D = 0$

Achsenabschnittsform

$\varepsilon\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

a, b, c sind die Achsenabschnitte von ε
s_1, s_2, s_3 heissen Spurgeraden von ε



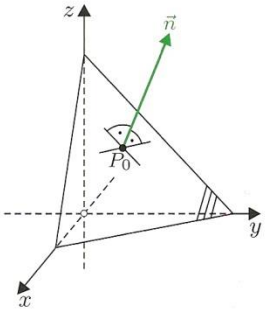
Spurgeraden/ Spuren

Die Schnittgeraden zwischen einer Ebene und den Koordinatenebenen heissen Spurgeraden.

Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

ist ein Normalenvektor zu ε



Normalenform

$\varepsilon\colon \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

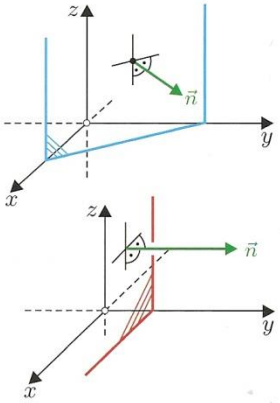
ε ist durch einen Punkt P_0 sowie einen Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben.

Hessesche Normalform

$$\varepsilon\colon \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Spezielle Lagen von Ebenen

Ebenen, die senkrecht auf einer Koordinatenebene (Rissebene) stehen, heissen projizierende Ebenen.
z. B. $Ax + By + D = 0 \qquad (C = 0)$



Ebenen, die parallel zu einer Koordinatenebene liegen, heissen Hauptebenen.
z. B. $By + D = 0 \qquad (A = C = 0)$.

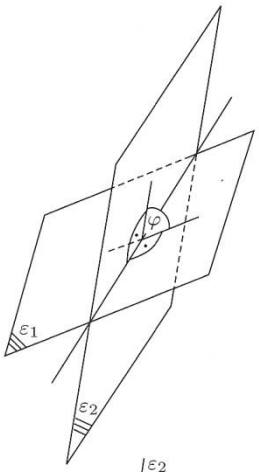
48

Die Kugel

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Für eine Ebene ε in der Koordinatenform und einen Punkt $P_1(x_1|y_1|z_1)$ gilt für den Abstand d von P_1 zu ε:

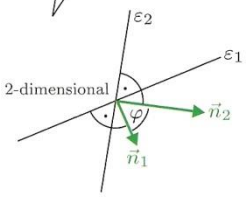
$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$



Winkel zwischen zwei Ebenen

Für den spitzen Schnittwinkel φ zwischen den Ebenen ε_1 und ε_2 mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ gilt:

$$\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{n_1 \cdot n_2} \right|$$

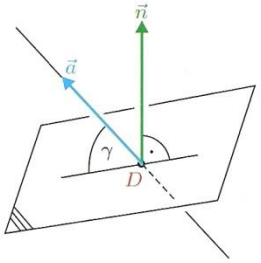


Neigungswinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

Für den spitzen Neigungswinkel γ zwischen einer Geraden g mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$ und einer Ebene ε gilt:

$$\sin\gamma = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{a \cdot n} \right|$$

D ist der Durchstosspunkt von g mit ε.



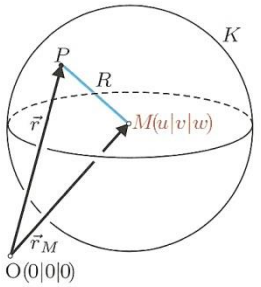
11.5 Kugel

Gleichung der Kugel mit Vektoren

Die Kugel K hat den Mittelpunkt $M(u|v|w)$ und den Radius R:

$$K\colon (\vec{r} - \vec{r}_M) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_M) = R^2$$

$\vec{r}$ ist der Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt auf der Kugeloberfläche.



Koordinatenform

$$K\colon (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2$$

Die Vektortypen im Business Engineering

Grundsätzlich eignen sich Vektoren immer dann, wenn es darum geht, mehrere Eigenschaften eines Objektes im Zusammenhand darzustellen.

Für die Anwendung der grafischen Vektoren in der Ökonomie hat es sich gezeigt, dass die Unterscheidung in zwei Vektortypen (Vektortyp 1 und Vektortyp 2) hilfreich ist.

Beim Vektortyp 1 können für die beiden Achsen beliebige Metriken – normierte (objektive) oder nicht-normierte (subjektive) – verwendet werden. Einzige Bedingung ist, dass die einzelnen Objekte mit den gleichen Kriterien "gemessen" oder bestimmt werden.

Nutzen:

Mit diesem Vektortyp werden Details und Zusammenhänge nicht mehr separat dargestellt, sondern gemeinsam. Das eröffnet völlig neue Perspektiven in der Abbildung, der Diskussion und der Simulation von wirtschaftlichen Realitäten.
Komplexe Prozesse werden daher eher überblickbar und "handhabbar".

Beim Vektortyp 2 wird die Vektorspitze über zwei (normalerweise monetäre) Stützpunkte auf der x-Achse bestimmt.
Zum Beispiel Kaufpreis und Herstellkosten – oder Börsenkapitalisierung und Bilanzsumme auf der horizontalen Achse. Durch die Umrechnung auf die y-Achse kann dann der subjektive Wert des Käufers numerisch (und auch grafisch) eindeutig bestimmt werden.
Dadurch ist es in den Wirtschaftslehren erstmals möglich mit subjektiven und objektiven Werteigenschaften – Kosten und Nutzen beispielsweise – gleichzeitig zu rechnen.

Nutzen:

Mit diesem Vektortyp wird eine mathematische Verbindung zwischen der expliziten und der impliziten Wertachse geschaffen.
Damit erhalten erstmals die subjektiven Werteigenschaften von Käufern, Shareholdern, Stakeholdern.... rationale und logisch wissenschaftliche Kennzahlen und Massstäbe, die es erlauben, mit subjektiven Werteigenschaften zu rechnen.
Der Vektor wird dadurch zu dem idealen Instrument für die Quantifizierung der neueren ökonomischen Entwicklungen wie "Behavioral Economics", "Social Economy", "Econophysics", "Hybride Wertschöpfung".....

Weitere Erläuterungen und Beispiele für verschiedene monetäre und nicht-monetäre Werte-Metriken finden Sie unter den nachfolgenden Links:
http://www.bengin.net/zbu/spec.htm
http://www.bengin.net/soft/vektorbeispiele01_d.htm
http://www.bengin.net/math/math_metriken.htm

Rechte

Anfragen, welche die Urheberrechte für die Anwendung der grafischen Vektoren in der Ökonomie betreffen, sind an den Autor der Business Engineering Systeme zu richten.

Ingenieurbüro für Wirtschaftsentwicklung | Dipl. Ing. Peter Bretscher | peter.bretscher@bengin.com
Alpsteinstrasse 4 | CH - 9034 Eggersriet | T: +41(0)71 877 14 11 | M: +41(0)79 650 49 04
Web: www.bengin.com
Blog: www.bengin.com/wp/
Twitter: http://twitter.com/peterbretscher

© 2011 INSEDE
Institute for Sustainable Economic Development | main@insede.org
All Rights Reserved, graphics are part of Business Engineering Systems, Registered Copyright TXu 512 154; 20. März 1992; derivative works (MindWare and SoftWare) and commercial use needs license.

Weitere Informationen:

Project NEMO (New/Next Economic Model): http://project-nemo.org

INSEDE (Institute for Sustainable Economic Development): http://insede.org

Business Engineering Systems (Principles, rules, tools): http://bengin.net/bes/